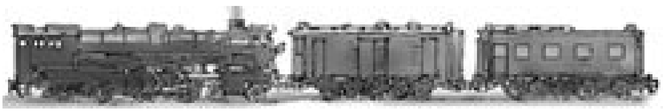
Matka 20 (2011./2012.) br. 79

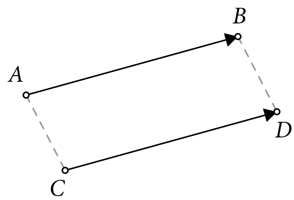
POMAK ILI TRANSLACIJA

Anđelko Marić, Sinj

U ovom broju nastavit ćemo slijed članaka o preslikavanjima ravnine. Na redu je preslikavanje koje se zove *pomak* ili *translacija*. Doslovan prijevod ove latinske riječi (*translatio*) znači prijenos, što će nam pomoći da lakše razumijemo sadržaj toga matematičkog pojma. Da bi se usvojilo i ovladalo temeljnim znanjima iz ovog sadržaja, potrebno je poznavati najjednostavnije činjenice o vektorima, o kojima smo govorili u prošlom broju Matke. Zato preporučujemo onima koji taj članak nisu pročitali, a posebno onim učenicima koji se s time još nisu susreli u redovitoj nastavi, da prije čitanja ovog članka pročitaju već objavljeni.

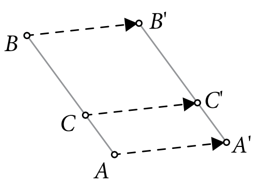
Translacija je određena zadanim vektorom. Ako translacija t za vektor $\vec{v}$ točki A pridružuje točku B, onda je $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$. Isto tako označavamo $B = t(A)$, ili $\overrightarrow{At(A)}=\vec{v}$. Ako neka translacija točki A pridružuje točku B, a točki C točku D, to jest ako je $t(A) = B$ i $t(C) = D$, onda je $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$,





što je pokazano na gornjoj slici. To znači da su točke A, $t(A)$, $t(C)$ i C vrhovi paralelograma $ABDC$.

Promatrajmo dužinu $\overline{AB}$. Neka je t pomak koji točki A pridružuje točku A', a točki B točku B'. Ta translacija svakoj točki C dužine $\overline{AB}$ pridružuje neku točku C' dužine $\overline{A'B'}$, kao na ovoj slici. Kažemo da se translacijom dužina $\overline{AB}$ preslikava u dužinu $\overline{A'B'}$, što zapisujemo $t(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$.



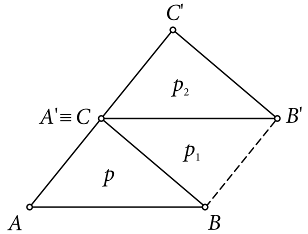
Na temelju definicije pomaka zaključujemo da su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ međusobno usporedne i sukladne. Zbog toga, translacija preslikava trokut ABC u sukladni trokut $A'B'C'$, pri čemu su odgovarajuće stranice tih dvaju stranica usporedne. Općenito, translacija svaki lik preslikava u sukladan lik.

Ako translacija trokut T preslikava u trokut T', onda se težišnice trokuta T preslikavaju u odgovarajuće težišnice trokuta T', ortocentar trokuta T u ortocentar trokuta T', opisana kružnica trokuta T u opisanu kružnicu trokuta T' i tako dalje.

Translacija pravac p preslikava u usporedni pravac p'. Ako translacija pravce p i q preslikava u pravce p' i q', onda se sjecište pravaca p i q preslikava u sjecište pravaca p' i q'.

Primjer 1. Zadan je trokut ABC površine $p = 17$. Translacija za vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ preslikava taj trokut u trokut $A'B'C'$. Izračunajmo površinu četverokuta $ABB'C'$.

Rješenje:

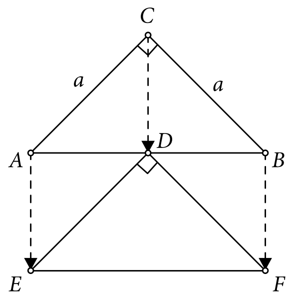


Točka A preslikava se u točku C, to jest točke A' i C se podudaraju.

Treba izračunati površinu $q = p_{ABB'C'} = p + p_1 + p_2$. Trokuti ABC i $A'B'C'$ su sukladni, zbog čega je $p_2 = p$. Četverokut $ABB'C$ je paralelogram, pa je $p_1 = p$. Zato je $q = p + p + p = 3p = 3 \cdot 17 = 51$.

Primjer 2. Zadan je jednakokračan pravokutan trokut ABC duljine kateta $a = 8$ cm. Točka D je polovište hipotenuze $\overline{AB}$. Translacija za vektor $\overrightarrow{CD}$ preslikava točke A i B u točke E, odnosno F. Izračunajmo površinu peterokuta $EFBCA$.

Rješenje:

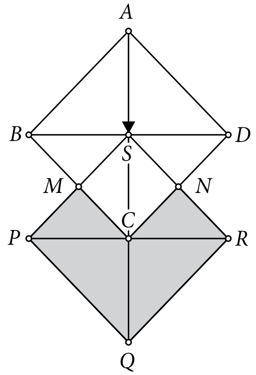


Trokut ABC je pravokutan, zbog čega je površina tog trokuta jednaka $p_1 = \frac{1}{2} a \cdot a = \frac{1}{2} \cdot 64 = 32$ (cm²).

Četverokut $EFBA$ je pravokutnik. Zato je površina tog pravokutnika jednaka $p_2 = 2p_1$. Tražena površina jednaka je $p = p_1 + p_2 = p_1 + 2p_1 = 3p_1 = 3 \cdot 32 =$ $= 96$ (cm²).

Primjer 3. Zadan je kvadrat *ABCD* sa središtem u točki *S*. Translacijom za vektor $\overrightarrow{AS}$ taj se kvadrat preslikava u kvadrat *SPQR*. Koliki se dio kvadrata *SPQR* nalazi izvan kvadrata *ABCD*?

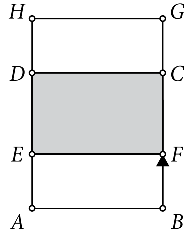
Rješenje:



Točka *A* prelazi u točku *S*, a točka *S* u točku *C*. Zato su, uz oznake kao na slici, točke *M* i *N* polovišta pripadnih stranica. Četverokut *SMCN* također je kvadrat. Taj se kvadrat nalazi unutar kvadrata *ABCD* i unutar kvadrata *SPQR*. Površina kvadrata *SMCN* jednaka je četvrtini površine kvadrata *ABCD*. Zato se izvan kvadrata *ABCD* nalazi $\frac{3}{4}$ površine kvadrata *ABCD*.

Primjer 4. Zadan je kvadrat *ABCD*. Točka *F* dijeli stranicu $\overline{BC}$ u omjeru 2 : 3. Translacija za vektor $\overrightarrow{BF}$ zadani kvadrat preslikava u drugi kvadrat. Izračunajmo omjer površine zajedničkog dijela tih dvaju kvadrata i površine polaznog kvadrata.

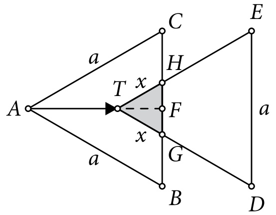
Rješenje:



Sa slike vidimo da se kvadrat *ABCD* preslikava u sukladni kvadrat *EFGH*. Zajednički dio tih dvaju kvadrata je pravokutnik *EFCD*. Ako je a duljina stranice polaznog kvadrata, onda je $|BF| = \frac{2}{5}a$ i $|FC| = \frac{3}{5}a$. Površina kvadrata jednaka je $p = a^2$, a površina pravokutnika $p_1 = a \cdot \frac{3}{5}a = \frac{3}{5}a^2 = \frac{3}{5}p$. Odavde slijedi da je traženi omjer $p_1 : p = 3 : 5$.

Primjer 5. Zadan je jednakostraničan trokut ABC kojemu je točka T težište. Translacija za vektor $\overrightarrow{AT}$ preslikava trokut ABC u trokut TDE. Koliki se dio trokuta TDE nalazi unutar trokuta ABC?

Rješenje:

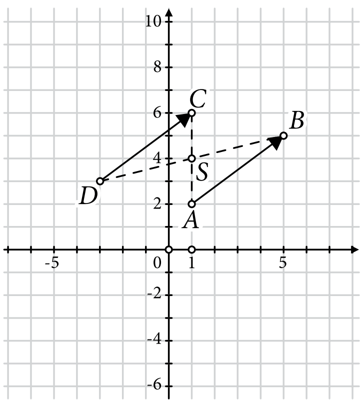


Trokuti ABC i TDE su sukladni. Zajednički dio tih dvaju trokuta jest jednakostraničan trokut TGH. Prema poučku o težištu trokuta vrijedi: $|TF| = \frac{1}{3}|AF|$. Duljine stranica trokuta ABC i TGH označimo s a, odnosno x. Zbog sličnosti vrijedi $|TF| : |AF| = x : a = 1 : 3$, tj. $a = 3x$. Površine trokuta ABC i TGH označimo s p i p_1. Vrijedi da je $p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(3x)^2\sqrt{3}}{4} = 9 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 9p_1$.

Odavde zaključujemo da se unutar trokuta ABC nalazi $\frac{1}{9}$ površine trokuta TDE.

Primjer 6. Translacija t preslikava točku A (1, 2) u točku B (5, 5). Odredimo točku C u koju ta translacija preslikava točku D (–3, 3).

Rješenje:



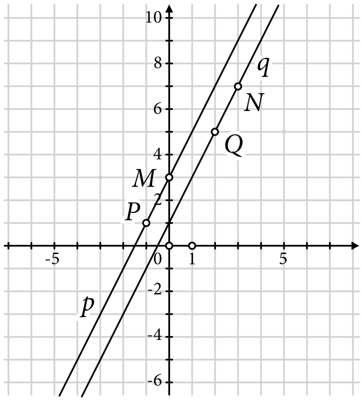
Prema definiciji translacije, vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ su jednaki, to jest četverokut $ABCD$ je paralelogram. Koristimo svojstvo dijagonala paralelograma: dijagonale paralelograma se raspolavljaju. Zato je točka S (x, y) zajedničko polovište dužina $\overline{BD}$ i $\overline{AC}$.

Vrijedi: $x = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$, $y = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$, S (1, 4). Također je $x = \frac{x_A + x_C}{2}$, $1 = \frac{1 + x_C}{2}$, $x_C = 1$ i $y = \frac{y_A + y_C}{2}$, $4 = \frac{2 + y_C}{2}$, $y_C = 6$, C (1, 6). Zadatak se može riješiti jednostavnije, bez pomoći slike.

Translacija točku A (1, 2) preslikava u točku B (5, 5), to jest vrijedi $x_A = x_B + 4$ jer je $5 = 1 + 4$. Isto je tako $y_B = y_A + 3$. Zato mora biti: $x_C = x_D + 4 = -3 + 4 = 1$, $y_C = y_D + 3 = 3 + 3 = 6$, C (1, 6).

Primjer 7. Zadan je pravac p jednadžbom $y = 2x + 3$ i točka tog pravca P (–1, y). Translacija t točku P preslikava u točku Q (2, 5). Ta translacija pravac p preslikava u pravac q. Odredimo jednadžbu pravca q.

Rješenje:



Prvo odredimo ordinatu točke P. Za $x = -1$ imamo $y = -2 + 3 = 1$, to jest P (–1, 1).

Odredimo još jednu točku (bilo koju, različitu od P) pravca p. Za $x = 0$ imamo $y = 3$, to jest točku M (0, 3). Budući da je $x_Q = x_P + 3$, $y_Q = y_P + 4$, to je $x_N = x_M + 3 = 0 + 3 = 3$, $y_N = y_M + 4 = 7$; N (3, 7). Pravac q određen je točkama Q i N, odakle je jednadžba tog pravca: $y = 2x + 1$.

Drugi način: Translacija pravac preslikava u usporedni pravac. Usporedni pravci imaju jednake koeficijente smjera. U ovom slučaju, to je $a = 2$. Zato jednadžba pravca q glasi: $y = 2x + b$. Pravac q sadrži točku Q, zbog čega je $5 = 2 \cdot 2 + b$, $b = 1$. Tražena jednadžba je $y = 2x + 1$.